CABRI AU LYCEE

Cabri, un outil algébrique

Les fonctions de référence en seconde - Deuxième partie

N. AYME

Nous proposons aujourd'hui une vision Cabri de l'apprentissage des fonctions de référence en seconde. L'utilisation de l'outil algébrique dans les problèmes de construction permet de sensibiliser l'élève à la notion de repérage dans le plan; il peut ainsi mieux saisir le sens du terme "représentation graphique". Nous retournons alors à une vision géométrique de l'algèbre qui est loin d'être neuve. L'utilisation de l'algèbre dans les problèmes de construction se pose en ces termes : une unité de longueur et un repère orthonormé étant choisis, on calcule les coordonnées x, y d'un point à construire en fonction des longueurs a, b... connues au départ. Si x, y s'expriment au départ au moyen d'opérations algébriques que l'on sait traduire par une construction, on pourra construire le point cherché.

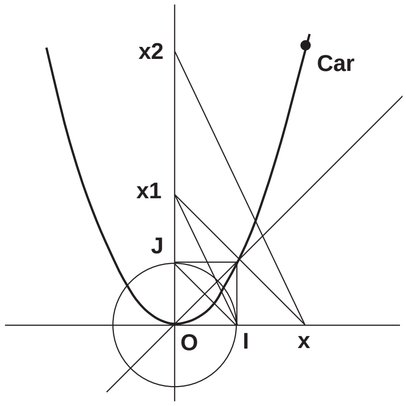
Pour ce qui est de la construction des fonctions de référence, seules des compétences algébriques de niveau collège sont nécessaires, à savoir : des segments de longueur 1, a, b étant donnés, comment construire des segments de longueur a + b, a - b, ab, a/b et $\sqrt{a}$? Rien d'inabordable ici pour un élève tout neuf entrant au lycée [(1)].

▼ Choix d'un repère

Pour la construction de ces fonctions de référence, on se donne toujours au départ un repère orthonormé (O, **OI**, **OJ**) de la manière suivante : on se donne une droite de base d, une origine O sur d et un point I sur d (la longueur OI représente notre unité). Un cercle de centre O, de rayon OI permet de construire le point J sur l'axe des ordonnées. Puis on définit un point x, objet sur d [(2)], matérialisant l'abscisse x, qui nous permettra de construire les points décrivant les courbes cherchées.

▼ Fonction carré

La parallèle à (IJ) passant par x coupe (OJ) en x1. La parallèle à (Ix1) passant par x coupe (OJ) en x2. On construit le point Car(x, x2) en translatant x2 de vecteur **Ox**. Car décrit la parabole $y = x^2$ lorsque x décrit l'axe d. Transformer la construction en macro *Carré_x* avec comme objets initiaux la droite d, les points O, I et x puis comme objet final le point Car.



Construction de la fonction carré et comparaison de x et x^2 pour $x \geq 0$.

Cabri est un merveilleux traceur de courbe grâce auquel les élèves **créent** eux-mêmes le point courant. Ces séances de construction aboutissent naturellement aux opérations sur les inégalités. En effet, l'argument de vos collègues "pas question de faire du Cabri, le programme de seconde est trop lourd...", sera vite balayé par les interprétations graphiques que l'on fait naturellement et *dynamiquement* en terme de comparaisons algébriques. Dans le cas de la fonction carré, lorsque x varie, les élèves observeront la différence de position entre les points x1 et x2 (d'ordonnées respectives x et x^2) : x2 est avant x1, quand $0 \leq x \leq 1$, puis le rattrape et le dépasse dès que $x \geq 1$ (d'où $x^2 \leq x$ si $x \leq 1$ ...). On peut lier cela à la position de la parabole par rapport à la droite d'équation $y = x$ (médiatrice de [IJ]) [(3)].

On peut faire remarquer aux élèves que, pour x strictement positif, quand x augmente, les points x1 et x2 vont dans le même sens (fonction croissante pour $x > 0$). Ils observeront d'eux-mêmes que les points ne vont pas "à la même vitesse". x1 va à une vitesse "constante" et x2 va d'abord doucement puis plus vite... Les élèves s'interrogent alors, grâce au dynamisme de Cabri, sur des notions liées à la dérivée... ce qui la rendra plus facile à introduire par la suite.

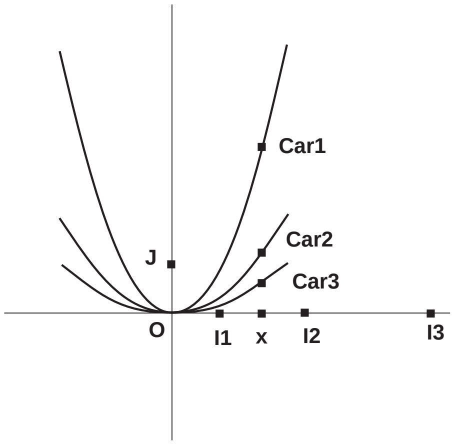
Effet loupe : on peut demander aux élèves de déplacer I (x fixé), et d'observer : x et x1 ne bougent pas (la droite y = x non plus) mais x2 descend et passe en dessous de x1 quand I va à droite de x. L'élève peut alors observer que plus l'unité est grande, plus la parabole se pose "doucement" sur l'axe des abscisses au voisinage de zéro, mais pour cela il lui faudra

(1) Toutes les constructions qui suivent (sauf pour la fonction racine) sont des utilisations mathématiques concrètes de Thalès (ou utilisation de l'homothétie en analyse). On pourra éventuellement relire la boite à macros d'abraCAdaBRI n°1 où les macros *Produit ab* et *Quotient a/b* sont développées mais ce n'est pas indispensable.

(2) En réalité, x doit être un point sur objet d'un segment [CD] si l'on veut faire un tracé automatique sur PC (voir page technique du n° 1), et cela permet d'autres possibilités sur Mac (Note 4). Dans toutes les figures, x sera donc un point sur objet d'un segment de la droite d.

(3) ceci peut être observé pendant le tracé manuel du lieu : on voit le point Car se déplacer en dessous, puis au dessus de la médiatrice de [IJ], alors que x1 et x2 se déplacent sur l'axe des ordonnées.

un élément de comparaison, et donc une autre parabole en place.

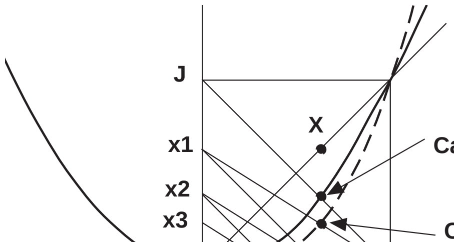


Effet loupe sur la fonction carrée : comportement en zéro (4)

▼ Fonction cube

La parallèle à (IJ) passant par x2 permet de construire le point d'abscisse x^2 sur d, point à partir duquel on mène la parallèle à (Ix1) qui coupe l'axe (OJ) en x3. Le point Cub(x, x^3) est le translaté de x3 de vecteur **Ox**. Ce point décrit la courbe $y = x^3$ lorsque x décrit d. On peut alors observer les positions relatives des points X(x, x), Car et Cub selon que $x \geq 1$ ou $0 \leq x \leq 1$ et en déduire encore une fois des inégalités.

Transformer la construction en macro *Cube_x* avec comme objets initiaux la droite d (voir note 2), les points O, I et x puis comme objet final le point Cub.

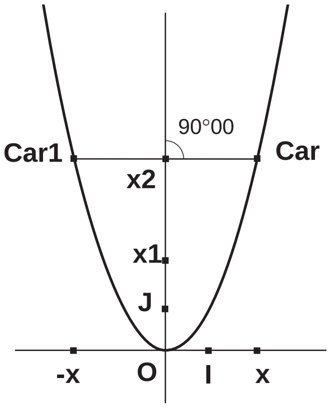


Construction de la fonction cube et observation de l'inégalité $0 \leq x^3 \leq x^2 \leq x \leq 1$ pour $0 \leq x \leq 1$.

▼ Parité, imparité

On remarque certaines propriétés des courbes Carré, Cube. Que peut-on conjecturer dessus ? Nous n'avons pas fini d'exploiter la richesse de cette activité, grâce à l'interactivité de Cabri. En effet, construisons le symétrique de x par rapport à O. On obtient bien sûr le point d'abscisse -x auquel on applique la macro Carré_x afin de construire le point Car1. En faisant croître x à partir de O, que remarque-t-on alors ? Le point décrit la courbe et si on trace le segment [Car Car1], on peut mesurer l'angle que fait ce segment avec l'axe des ordonnées, ainsi que la longueur des segments de part et d'autre de l'axe, afin d'émettre une conjecture sur la médiatrice de [Car Car1] (5).

Le même genre d'approche concernant l'imparité peut être faite sur la fonction Cube. Au point d'abscisse -x, on applique la macro Cube_x pour construire le point Cub1. On trace alors la courbe en mode manuel, en faisant croître x à partir de O...



Les élèves réagissent, et on peut leur proposer de chercher le milieu du segment [Cub Cub1], après avoir pris la précaution de faire disparaître le point O. Quelques conjectures à faire avec vos élèves qui vous mèneront sans difficulté aux notions de parité et d'imparité...

▼ Fonction inverse

Nous reprenons la configuration de départ, à savoir un repère orthonormé et un point x sur d. La parallèle à (Jx) passant par I coupe l'axe des ordonnées au point d'ordonnée 1/x. Une translation de vecteur **Ox** appliquée à ce point permet de placer le point Inv(x, 1/x). Transformer en macro *Inverse_x*, avec comme objets initiaux la droite de base d, l'origine O, le point unité I et x et comme objet final le point Inv. De même, à partir d'un point d'abscisse a sur d, en lui appliquant la macro *Inverse_x*, on construit le point A(a, 1/a). En gardant a fixe, on déplace x (le contraire est possible**(6)**) et on observe que si $x \leq a$, (a et x étant de même signe) $1/x \geq 1/a$, ceci traduisant la décroissance de la fonction inverse. On peut également construire le point d'abscisse -x, puis le point Inv1 en lui appliquant la macro *Inverse_x* pour ensuite observer des phénomènes de symétrie.

(Suite page 17)

(4) Sur Mac, il est possible de voir la courbe se redessiner en temps réel lorsque l'on déplace l'un des paramètres de construction(en l'occurence ici le point I) - détaillé dans la note technique de ce numéro - mais pas sur PC...

(5) Les utilisateurs sur Mac peuvent demander à Cabri si les droites (Car Car1) et d sont parallèles.

(6) Avec Cabri, tout est dynamique, et donc tous les noms sont des noms de variables muettes. On fait déplacer I pour observer la loupe, on fait déplacer a en laissant x fixe. Cela permet alors de mieux intégrer les différents contextes en voyant que ce ne sont que des conventions culturelles d'écriture :
x variable d'analyse en général décrit un intervalle; a, b variables d'algèbre sont souvent des paramètres. Elles ont toutes le même statut avec Cabri.