

Cabri-sensibilisation évolutive à des sections dans l'espace

Compte-rendu d'une expérience vécue en classe de première S (1)

N. AYME

(1) Compte-rendu adapté du scénario pédagogique proposé au cours de la première Université d'été consacrée à Cabri (Grenoble 9-13 juillet 1993).

Avant de parler de ma première expérience pédagogique entièrement réalisée avec Cabri, je présente en deux mots l'historique de ma rencontre avec ce logiciel. Je l'ai découvert lors d'un stage se déroulant sur six semaines en octobre-novembre 1992, stage animé par Yves Martin qui, bien sûr, a su contaminer quelques participants : j'y ai attrapé le «Cabri-virus». Emballée par ailleurs par un T.P. de géométrie dans l'espace de l'Irem de Strasbourg [1], j'ai pensé qu'une réalisation concrète de ce T.P. un peu difficile pourrait être facilitée par l'utilisation de l'outil informatique Cabri. J'ai donc préparé une séquence de géométrie dans l'espace constituée de plusieurs sections de volumes à chercher sur Cabri. Ces sections étaient des exercices à difficulté progressive et conduisaient naturellement aux sections du cube proposées par l'Irem de Strasbourg.

▼ **Présentation du scénario - Objectifs**

A - objectifs : nous avons tout d'abord effectué une approche de type "mise en confiance" des exercices dans l'espace. Pour cela, j'ai d'abord distribué un document résumant les diverses propriétés sur l'espace vues en seconde. Ce rappel sur l'espace a été lu et commenté en cours. Objectif principal : arriver rapidement aux sections de solides. La distribution préliminaire du polycopié sur l'espace était indispensable, car ces notions, supposées acquises en seconde n'ont été qu'effleurées voire ignorées. Je voulais donc que les élèves s'habituent à effectuer des sections de solides pour passer ensuite à des exercices plus complets et plus diversifiés. L'intérêt de faire faire à l'élève un grand nombre de sections, est qu'il intègre ensuite facilement le mécanisme à appliquer. Les sections, malgré des constructions un peu fastidieuses, deviennent ensuite machinales. Toute cette phase de mécanisation a permis ensuite d'utiliser notre savoir-faire pour essayer de résoudre le problème d'optimisation suivant : recherche de la section d'aire maximale d'un cube par un plan perpendiculaire à l'une de ses diagonales [1]. Ce problème d'optimisation dans l'espace donne lieu à la construction de très belles figures et met en oeuvre une fonction du second degré à maximiser : excellente occasion pour vérifier que les acquis du premier trimestre étaient bien assimilés (nous ne disposons pas

encore de "l'outil dérivée").

B - présentation du scénario : dans le document distribué, on insiste sur le fait que l'intersection de deux plans sécants est une droite. Il peut donc être utile de prolonger les arêtes d'un solide pour trouver deux points qui appartiennent simultanément à une face du solide et au plan de section.

a) première phase du scénario : exercices - à difficulté évolutive - de familiarisation avec les sections de solides.

Les élèves devaient écrire une justification de la construction qu'ils proposaient. Cette justification écrite était condition *sine qua non* de passage à l'exercice suivant.

α) tétraèdre :

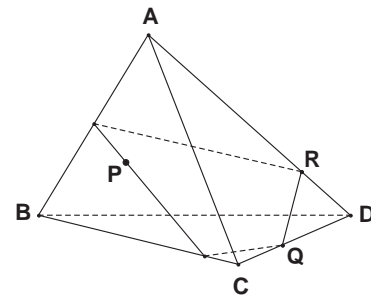
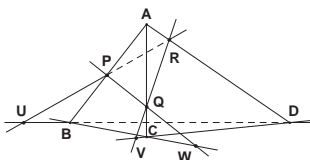
- Exercice préliminaire : Les points U, V, W sont-ils alignés ? Si oui, pourquoi ? (voir figure en marge).

La consigne pour tous les exercices suivants est de chercher la section du tétraèdre ABCD par le plan PQR.

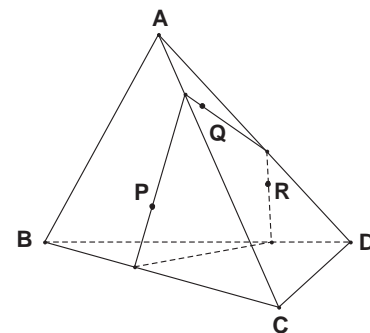
- Exercice 1 : P est sur [AB], Q est sur [AC] et R sur [AD].

- Exercice 2 : Q est sur [CD].

- Exercice 3 : R est sur [AD], Q sur [CD] et P sur la face ABC.

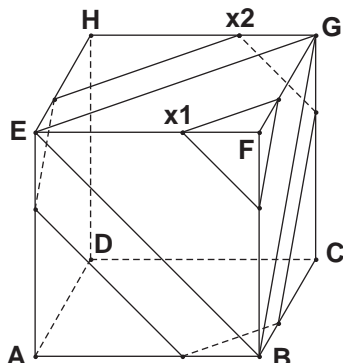


- Exercice 4 : P est sur la face ABC, R sur la face ABD et Q sur la face ACD.

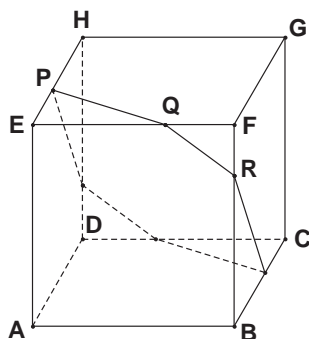


β) cube :

- Exercice 1 : Section du cube ABCDEFGH par le plan parallèle à EBG passant par x1
- Exercice 2 : Section du cube ABCDEFGH par le plan parallèle à EBG passant par x2.



- Exercice 3 : Section du cube par le plan PQR

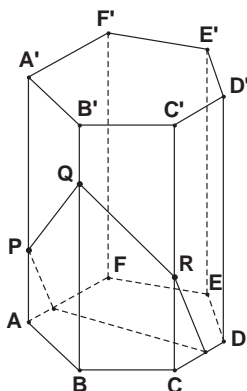


- Exercice 4 : même énoncé que l'exercice 3 avec Q sur [AB] et R sur [CD] (ou sur [CG] mais plus difficile).

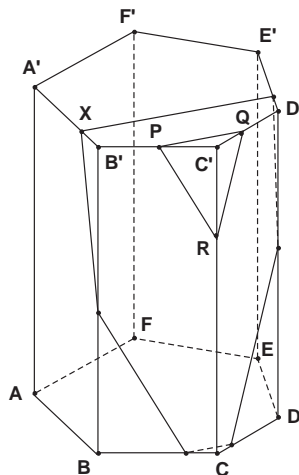
γ) évaluation : Dans un devoir de 3 heures consacré à l'analyse et à l'espace, la partie espace était constituée de 4 exercices de sections d'un prisme par un plan PQR (notés sur 8 points et pour lesquels il fallait compter environ 1 heure). Seul un des quatre exercices devait donner lieu à une justification complète de la construction :

Exercices 1 à 3 : Section du prisme ABCDEFA'B'C'D'E'F' par le plan PQR.

- Exercice 1 : R est plus près de C que de C' (section pentagonale).

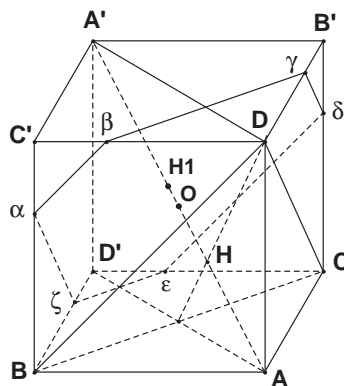


- Exercice 2 : R est plus près de C' que de C.
- Exercice 3 : P ne bouge pas, Q est sur [A'F'] et R sur [F'E'].
- Exercice 4 : Section du prisme par le plan passant par X parallèle à PQR.



Prolongement possible : faire chercher la section lorsque X est sur [E'F'] ...

b) deuxième phase du scénario : on cherche à résoudre le problème suivant : *Quelle est la section d'aire maximale d'un cube coupé par un plan perpendiculaire à l'une de ses diagonales ?*



Le problème a été proposé en devoir à la maison. Les élèves l'ont trouvé difficile et ont mis plus de trois semaines à le faire. En fait, il met en oeuvre beaucoup d'autres concepts que les sections de solides : utilisation d'homothéties dans l'espace pour démontrer que des sections sont homothétiques, expression de l'aire de la section à maximiser. Ce TP était l'occasion de vérifier que les élèves arriveraient à réinvestir "l'outil algébrique" pour maximiser une fonction du second degré (avec une expression différente sur 3 intervalles) car nous ne disposons pas encore de "l'outil dérivée". Le TP demandait à l'élève, dans un premier temps, de montrer que (AA') est perpendiculaire au plan BCD. Si on appelle H l'intersection de [AA'] et de BCD et H₁ un point quelconque de la diagonale, il fallait

dessiner dans un deuxième temps les diverses sections passant par H_1 que l'on obtenait lorsque H_1 se déplace sur la diagonale [AA']. La visualisation préliminaire de cette section à l'aide de Cabri m'a permis de leur demander quelle semblait-être la section d'aire maximale. La construction de la section lorsque H_1 varie sur [AA'] n'a posé aucune difficulté sur Cabri car naturelle après les exercices précédents. L'outil Cabri permettait donc d'émettre une conjecture concernant l'optimum. Les élèves étaient ensuite guidés par le TP pour aboutir à l'expression analytique de l'aire S de la section en fonction de la distance d du point A au plan de section (raccordement C^1 de trois paraboles) avec $d = AH_1$. Ils devaient ensuite obtenir en utilisant l'outil algébrique le maximum de cette aire (maximisation d'aire à périmètre constant). Un prolongement possible du scénario est de montrer aux élèves la section en vraie grandeur obtenue à l'aide de Cabri, ou mieux encore de la leur faire construire. Le formidable outil "lieu de plusieurs points" permet de reconstituer entièrement la représentation graphique de $S(d)$ et de visualiser l'aire maximale de la section (2).

▼ **Réalisation et mise en oeuvre**

A - paramètre temps du scénario

Le déroulement dans le temps du scénario s'est effectué comme suit (nous avons sur cette période alternance analyse-géométrie) :

Semaine 1 : 1h - poly commenté rapidement.
2h - exercices sur le tétraèdre - à terminer en travail personnel.

Semaine 2 : 2h - exercices sur le cube.

Semaine 3 : évaluation - analyse et espace; distribution du devoir à la maison "sections du cube".

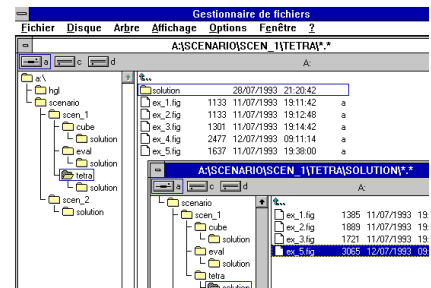
Semaine 7 : 1h30 - correction des sections du cube.

Quant aux séances consacrées aux exercices, elles se sont déroulées ainsi : après un temps moyen de recherche personnelle, environ 10 mn par exercice, les élèves discutaient entre eux. Au bout de 10 mn, un élève venait donner la solution sur un ordinateur dont l'écran était rétroprojeté. La rédaction de la solution était d'abord formulée oralement puis rédigée au tableau. Cela nous prenait encore environ 10 mn. Tout ce travail représente donc environ 30 mn par exercice.

B - paramètre technique du scénario

Tout le scénario a été réalisé à l'aide de Cabri. La mise en oeuvre est donc entièrement informatique et l'intérêt principal d'utiliser Cabri est de pouvoir fournir aux élèves des figures dynamiques, au sens Cabri, déjà prêtes (le travail long et fastidieux de construction des

solides est ainsi évité), ainsi que des fichiers-solution - je ne connaissais pas les *Post-it* d'Alice à l'époque. Voici la structure arborescente de la disquette accompagnant ce scénario :



C - paramètres espace et disponibilité salle-info du scénario

En réalité, compte-tenu de la non disponibilité de la salle informatique - prise d'assaut par les économistes - et compte-tenu de son encombrement spatial, toutes ces séances ont été réalisées en classe entière sous forme de séances de rétroprojection. Chaque élève disposait d'une sortie-papier du dessin Cabri à terminer, distribuée au fur et à mesure des exercices à traiter et sur laquelle ils écrivaient la preuve de la construction.

▼ **Intérêt de la méthode - Résultats**

A - Intérêt de la méthode

a) *motivation des élèves* : les élèves n'avaient pas l'habitude de ce genre de séances assistées par ordinateur. Ils n'ont pas eu de mal à canaliser leur attention sur ce qui se passait. Certains ont dit avoir l'impression d'être au cinéma ! Cabri est un formidable outil d'aide à la visualisation et la présentation des sections qui se modifiaient en temps réel sur l'écran lorsque l'on déplaçait l'un des points du plan de section les a émerveillés.

b) *gain de temps* : la préparation des volumes sur disquettes représente un gain de temps considérable. Tout l'aspect technique et laborieux de constructions de solides est évité (ces constructions ne présentent plus grand intérêt au niveau lycée). L'élève pourra se consacrer de manière efficace à la résolution de l'exercice, le terminer plus rapidement, et en fin de compte, il aura effectué un plus grand nombre de sections en classe.

c) *aspect ludique* : Préparer à l'avance les dessins de base des exercices sur une feuille de papier est équivalent à utiliser Cabri dès lors que l'on omet l'aspect dynamique du logiciel. En effet, on pourra faire observer à l'élève l'effet produit par le déplacement d'un des points du plan de section sur la section : prolongement possible de ce genre d'exercices (il faudra alors penser à tous les cas de figure). Cabri permet donc de manière efficace et

(2) Par ailleurs, les techniques développées dans le Hacker de ce numéro - dites CLFC - permettent de construire la courbe à l'aide d'un seul point. Cette construction, laissée en exercice dans le Hacker, sera traitée au prochain numéro.

ludique une animation dynamique des figures.

B - Résultats - Commentaires

Les élèves ont eu certains exercices à terminer sur feuille à la maison. Ils ont dans l'ensemble éprouvé beaucoup de difficultés à finir les premières sections sauf quelques-uns qui "voyaient" bien dans l'espace. La justification des constructions était le plus souvent orale, parfois écrite.

Les évaluations

- devoir à la maison sur les sections du cube : les élèves, préalablement bien imprégnés d'espace, ont été passionnés dans l'ensemble par le devoir sur les sections du cube. Certains ont rendu des devoirs plus que conséquents : un devoir a été numéroté jusqu'à la page 51 avec de superbes dessins dans l'espace, construits à la règle et au compas (les traits de construction étaient encore apparents). Dans l'ensemble, les sections étaient mises en évidence, par coloriage ou par hachures. La justification de la section hexagonale n'a pas toujours été donnée, bien que j'aie insisté sur son caractère indispensable. Les élèves moins persévérants n'ont pas terminé le devoir. Ceux qui sont allés jusqu'à la recherche analytique de l'expression de l'aire de la section en fonction de la distance d du point A au plan de section (distance $d = AH_1$), en ont donné une expression correcte et ont bien obtenu le résultat attendu, à savoir : la section est d'aire maximale lorsque le plan de section passe par le centre du cube. Certaines copies d'élèves méritaient d'être conservées. Une élève a pensé à effectuer une synthèse du problème dans un tableau où elle résume tous les cas de figure et les sections

correspondantes. La Cabri-démonstration de la solution a beaucoup plu aux élèves. Ce problème a débouché sur une activité de "culture mathématique" puisque nous avons commenté la solution donnée par Bergson au concours général de philosophie en 1876 [1].

- devoir sur table : certains élèves ont très bien assimilé le scénario 1; ils ont eu entre 6 et 8 sur 8. Mais d'autres, visiblement, ont construit n'importe quoi (3). Il n'y a pas eu de juste milieu. Les élèves ont eu à refaire les sections à la maison.

Le mot de la fin...

Je n'ai pas assez d'expérience pour savoir si les élèves aiment ou n'aiment pas la géométrie dans l'espace en général. Mais j'ai nettement ressenti une appréhension de leur part lorsque nous avons abordé les sections, voire même un rejet épidermique, notamment de la part des filles ... Et comme je les comprenais ! Avant de rencontrer mon ami Cabri, je détestais dessiner l'espace. J'éprouvais beaucoup de difficultés à construire une section quelle qu'elle soit, et j'y aboutissais au prix de gros efforts intellectuels. L'aspect ludique de Cabri m'a poussée à faire d'autres sections. Je me suis amusée à bouger les "points sur objet" et à envisager tous les cas de figure. Petit à petit, cette gymnastique de l'esprit que je m'étais imposée a commencé à porter ses fruits et j'ai fini par chercher moins longtemps la solution de ce genre d'exercices. Je crois sincèrement que c'est le sentiment perçu par certains de mes élèves à la fin de ce scénario ou au moins après quelques mois, avec du recul. Merci Cabri. □

(3) L'erreur usuellement commise a été de tracer des parallèles sur des faces du prisme qui ne sont pas nécessairement parallèles.

Bibliographie
[1] "Sections du cube" - Géométrie 1eS. Irem de Strasbourg . ISTR A 1989.

a = arête du cube
 d = distance de A au plan de section.
 d' = distance de A' au plan de section