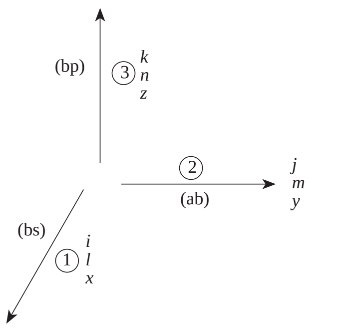
CABRI AU LYCEE

Séquence BD : La fièvre d'Urbicande en temps réel (2)

N. AYME

Comme promis dans le numéro 6, je vous propose aujourd'hui une simulation 3-D de l'évolution du phénomène mystérieux décrit dans *La fièvre d'Urbicande* [(1)]. Je dois tout de même vous prévenir que la construction qui suit va vous demander de la patience et de la persévérance. Les notations choisies sont le fruit d'une longue réflexion, ce sont celles qui m'ont semblé le mieux adapté à une explication claire et compréhensible. La construction que je vous propose est le produit final d'une longue série de figures élaborées dans un premier temps dans l'optique de modéliser le mieux possible le phénomène, puis dans un second temps avec le souci principal d'optimiser la construction. C'est ainsi que pour obtenir les croissances selon les trois axes en optimisant des objets, on a finalement opté pour l'utilisation de symétries centrales. Nous avons même tenté d'optimiser le nombre de symétries centrales utilisées.

(1) *La fièvre d'Urbicande* est une bande dessinée de Peeters et Schuiten, éditée chez Casterman.



Le cube correspondant au cube initial (génération zéro)

Créer une droite de base horizontale D, un point b sur D, a un point sur D, à gauche de b. [ab] représente l'arête du cube initial.

On construit alors : c symétrique de a par rapport à b, d celui de b par rapport à c. M est un point mobile sur [bd].

Cube abpqrstu : on peut utiliser la macro *cube* donnée dans l'*Abra*CA*da*BRI n°0 (PC 60°, coeff 1/2). Soit o le centre du cube.

Centres de symétrie de la figure : pour aborder une figure dont la construction sera récurrente, on se donne les points :

o11, milieu de [ap] (centre de symétrie de la face du réseau contenant a, b et p),

o12, milieu de [ps] (centre de symétrie de la face du réseau contenant b, s et t),

o13, milieu de [up] (centre de symétrie de la face du réseau contenant u, p et t),

o21, translaté de o11 de vecteur **sb**

o22, translaté de o12 de vecteur **ab**

o23, translaté de o13 de vecteur **bp**

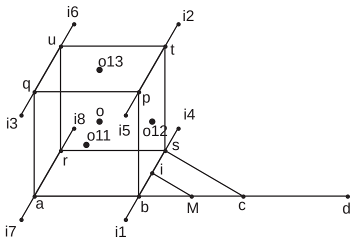
o31, symétrique de o11 par rapport à o21

o32, symétrique de o12 par rapport à o22

o33, symétrique de o13 par rapport à o23

Le cercle C(b, bM) coupe (bp) en k et n (n au-dessus de D).

Voilà, votre figure de base est terminée, nous allons commencer la progression des arêtes. Le principe des notations choisies est indiqué sur le premier schéma en marge. Au début de votre construction, vous allez devoir nommer vos points à la lettre (!), puis une fois le raisonnement bien en tête vous pourrez laisser les noms de côté : vous suivrez en vous aidant des figures de l'article.



chemin 1

Croissance des arêtes du cube initial vers le réseau de première génération

Croissance selon (bs) : création des points i1 à i8.

La parallèle à (cs) passant par M coupe (bs) en i. i1 est le symétrique de i par rapport à b. On suit alors le chemin suivant (*chemin 1* en marge) :

	So12	So13	So	So12	So13
i1	i2	i3	i4	i5	i6

puis i7 = So(i2) et i8 = So(i5) [(2)]. Créer alors les segments [i1i4], [i2i5], [i3i6] et [i7i8].

Il ne vous reste plus qu'à transformer la manip en macro *chemin* avec comme objets initiaux i1, o12, o13 et o, *dans cet ordre* et comme objets finaux les quatre segments que vous venez de créer. Cette macro *chemin* va être appliquée pour construire la croissance du réseau selon les trois axes : vous ferez très attention à l'ordre dans lequel vous l'appliquerez.

Croissance selon (ab) : création des points j1 à j8.

M représente le point j1. On construit ensuite (*chemin 2*) :

	So11	So13	So	So11	So13
M	j2	j3	j4	j5	j6

j7 et j8 sont aussi les images respectives de j2 et j5 dans la symétrie de centre o. Il suffit donc pour cela d'appliquer la macro *chemin* à M, o11, o13 et o.

Croissance selon (bp) : création des points k1 à k8.

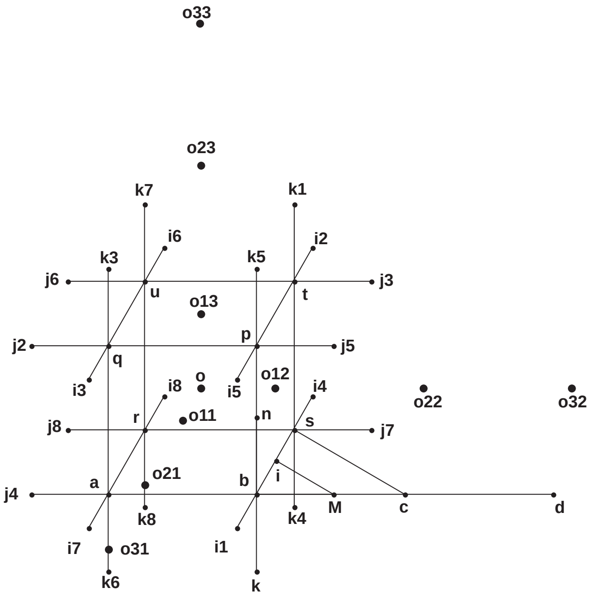
k représente en fait k2, et donc k1 = So12(k). Mais le principe précédent reste valable (*chemin 3*) :

	So12	So11	So	So12	So11
k1	k2	k3	k4	k5	k6

k7 et k8 sont construits comme précédemment. Il suffit donc d'appliquer encore la macro *chemin* à k1, o12, o11 et o.

Vous pouvez maintenant bouger M sur [bd] et observer les arêtes de votre réseau pousser.

(2) les Soij représentent les symétries centrales par rapport aux points oij (i et j prenant les valeurs 1, 2, 3) et So est la symétrie centrale par rapport au centre du cube.



vers le réseau de première génération

Croissance du réseau de première génération vers le réseau de seconde génération

Création prélable de quelques points logiques utiles.

Placer M entre c et d sur [bd]. e1 est l'intersection de [bn] et de [j2j5] : e1 est un point logique sur p qui n'existe que lorsque la croissance du réseau a dépassé la génération 1.

Les symétriques de e1 par rapport à t et b donnent f et w. Celui de f par rapport à o12 donne v. Le symétrique de e1 par rapport à o13 donne un point u' sur u. Le symétrique de u' par rapport à t donne g. Contrôlez que tous ces points n'existent pas lorsque M est « avant » c sur [bd].

Croissance selon (bs) : création des points (li) et (xi), 1 ≤ i ≤ 8.

On construit tout d'abord le point l1, translaté de w de vecteur **is**. Puis on passe de l1 à l8 par un chemin similaire au *chemin 1* mais en remplaçant So13 par So23. On applique donc la macro *chemin* à l1, o12, o23 et o.

Construire x1, translaté de c de vecteur **is**. Les xi sont construits suivant le même schéma que les ii, en remplaçant So12 par So22 : appliquer la macro *chemin* à x1, o22, o13 et o.

Croissance selon (ab) : création des points (mi) et (yi), 1 ≤ i ≤ 8.

On construit tout d'abord le point m1, translaté de v de vecteur **cM**. Puis on passe de m1 à m8 par un chemin similaire au *chemin 2* mais en remplaçant So11 par So21. On applique donc la macro *chemin* à m1, o21, o13 et o.

Construire y1, translaté de w de vecteur **cM**. Les yi sont construits suivant le *chemin 2*, en remplaçant So13 par So23 : appliquer la macro *chemin* à y1, o11, o23 et o.

Croissance selon (bp) : création des points (ni) et (zi), 1 ≤ i ≤ 8.

On construit maintenant le point n1, translaté de f de vecteur **pn**. Puis on passe de n1 à n8 par un chemin similaire au *chemin 3* mais en remplaçant So11 par So21. On applique donc la macro *chemin* à n1, o12, o21 et o.

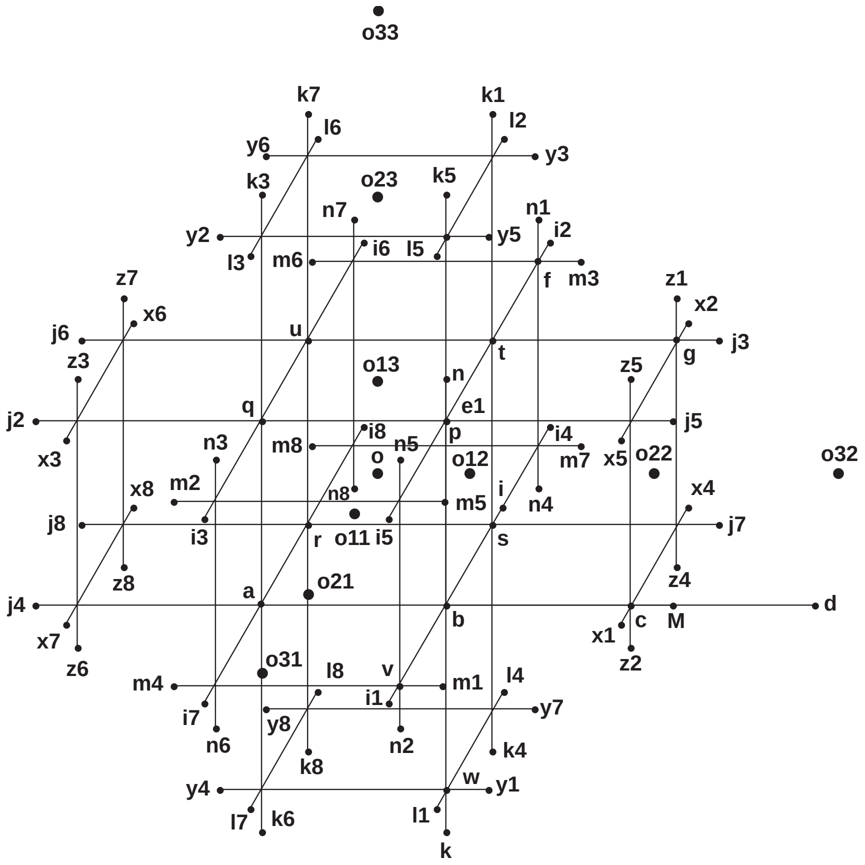
Construire z1, translaté de g de vecteur **pn**. Les zi sont construits suivant le *chemin 3*, en remplaçant So12 par So22 : appliquer la macro *chemin* à z1, o22, o11 et o.

Vous pouvez alors vous amuser à déplacer M autour du point c sur [bd] et admirer à loisir le cube initial qui devient réseau de première génération qui lui même continue à se développer.

Réseau de seconde génération

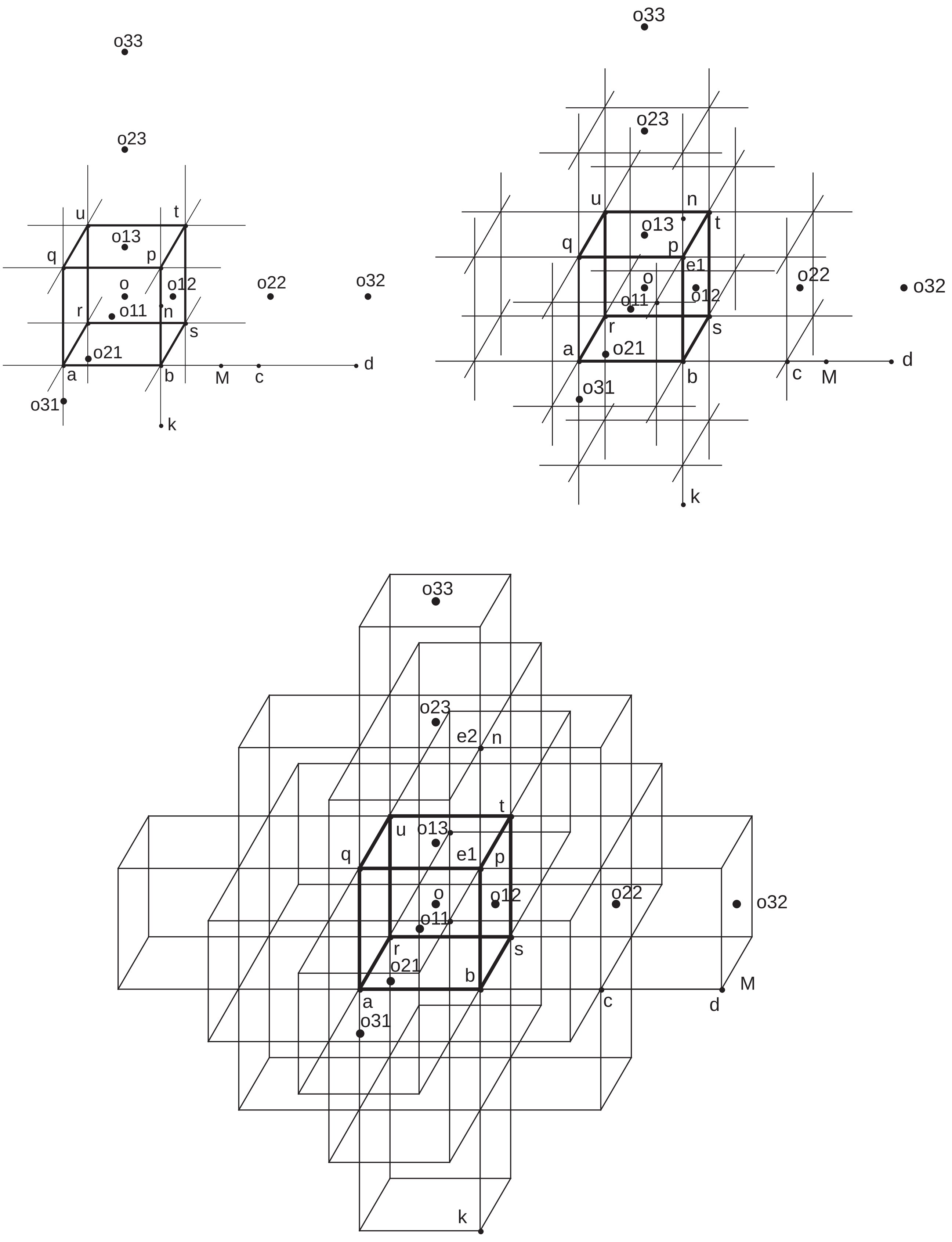
Placer M en d. Construire le point e2, intersection de [bn] et de [y2y5]. e2 n'existe que si M a atteint le point d, et donc si le réseau de seconde génération est entièrement constitué. e3 est le symétrique de e1 par rapport à e2. Le symétrique e'3 de e3 par rapport à o33 permet de terminer la face de dessus du réseau. La face de dessous se complète grâce aux symétriques par rapport à o des deux points logiques e3 et e'3.

L'intersection α de [y3y6] et de [z1z4] n'existe que lorsque M est en d. Nous allons donc la



vers le réseau de seconde génération

(suite page 14)



Inexorablement, le cube croît et se multiplie …

Conclusion de la première partie.

On voit que l'utilisation d'un logiciel comme CABRI-Géomètre peut fournir des problèmes mathématiques originaux et intéressants. De plus la solution du problème original fait appel à des idées n'excédant pas les connaissances de la classe de seconde. Elle nécessite néanmoins de faire une synthèse entre diverses notions (valeur absolue, représentation graphique, constructions géométriques) qui sont en général présentées séparément dans les cours traditionnels. Elle pourrait être un sujet de module fort intéressant pour la classe de seconde [6].

La même idée raffinée de plus en plus permet d'obtenir un triangle, mais aussi, dans le prochain numéro, un quadrilatère quelconque, comme lieux dans CABRI et la norme d'un point quand la boule unité est un quadrilatère convexe quelconque. Néanmoins, si on veut résoudre les problèmes analogues pour des polygones à plus de quatre côtés, il semble impossible de poursuivre dans cette voie. Dans un prochain article, je présenterai la notion de fonction indicatrice qui fournit une telle généralisation.

(6) Les Cabricôtiers ont pensé plutôt module en première S.

Bibliographie

[1] Michel CHASTELLAIN & Serge LUGON. CABRICOLAGES. Exploration dans le monde de la géométrie plane. Éditions L.E.P., Lausanne, 1992.

(suite de la page 6)

construire ainsi que son symétrique α' par rapport à o23. Ces deux points vous permettent de fermer les segments de la face horizontale contenant o23. Les symétriques de α et α' par rapport à o sont utiles pour compléter la face symétrique par rapport à o de cette face horizontale contenant o23.

Nous vous invitons alors, cher lecteur, à poursuivre seul le raisonnement pour terminer :
1) les faces latérales contenant o32, o22 et leurs faces symétriques par rapport à o
2) les faces verticales contenant o31, o21 et leurs faces symétriques par rapport à o
(N'oubliez pas que vous pouvez construire par exemple des *existences conditionnelles* à partir de e3).

Vérifiez que vos points nouvellement introduits n'existent plus (et les segments qui en découlent) si M n'est plus en d.

Pour avoir une figure agréable à regarder, vous n'avez plus qu'à gommer les points matérialisant les extrémités des arêtes. Et, tel un gamin, vous pouvez vous amusez à « tirer » sur le point M pour observer à loisir votre cube croître et se multiplier en temps réel.

! Lecteurs PC.
Ne sauvegardez pas votre figure lorsque M est en d

Voilà, cette construction est terminée. A une vingtaine d'objets près, vous devriez avoir 220 objets. C'est beaucoup, mais la première simulation du phénomène 3-D que j'ai effectuée sur Cabri m'a demandé 369 objets ! Monstrueux donc, et comme la figure n'était pas très loin des limites du logiciel (400 objets sur PC), dès que le point M était déplacé, le logiciel plantait une fois sur deux (il y a aussi un problème de gestion de la mémoire sur PC).

C'est avec grand plaisir que nous recevrons vos propositions d'optimisation. Mais il faut bien voir qu'ici, la préoccupation première a été d'avoir une construction récurrente. Vous pouvez par exemple entreprendre la construction du réseau de troisième génération, à condition que la figure reste lisible.

Si vous observez de près le phénomène en lisant la BD, vous constaterez qu'il est tout à fait continu en ce sens que le réseau d'une génération donnée est entièrement constitué lorsque les arêtes de la génération suivante sont à mi parcours alors que la simulation 3-D que je viens de vous proposer est discontinue. Par ailleurs, vous remarquerez aisément que l'arête initiale ne se contente pas de pousser, elle grandit aussi. Ce qui nous ouvre des horizons pour une simulation Cabri qui soit une meilleure approche du phénomène. A vous de jouer... Et peut-être à une prochaine fois.

Extrait de *L'ŒIL MAGIQUE* de N.E. Thing Enterprises aux éditions JA&T.Paris