

Une approche du monde fractal en classe de première

N. AYMÉ

[3] " *Travaux interdisciplinaires : Mathématiques et Philosophie en classes terminales scientifiques* " IREM de Poitiers, 1993.

[1] " *Fractals for the classroom, part one : introduction to fractals and chaos* " de Maletski, Perciante et Yunker, Springer-Verlag 1993. livre clair et très riche en illustrations, il a l'avantage de détailler les algorithmes de construction d'un grand nombre de fractales.

[4] " *Les formes fractales* " revue du Palais de la Découverte 1991 pour le plaisir des yeux...

[2] " *Les objets fractals : Forme, hasard et dimension* " de Benoît Mandelbrot, collection Champs, Flammarion 1995 lecture incontournable si l'on veut se familiariser avec le concept d'objets fractals, puisque B. Mandelbrot en est le père. C'est la quatrième édition, la première étant parue en 1975. Ce livre comporte par ailleurs une bibliographie quasi complète de tous les livres parus sur les fractales depuis 1975.

Je vous propose aujourd'hui une incursion au pays des fractales que j'ai effectuée avec mes classes de premières (S et L) pendant l'année scolaire 94-95. Pour cette incursion, j'ai choisi une approche en trois temps :

1. une approche culturelle (littéraire, historique et artistique),
2. une approche avec CABRI,
3. une approche par le calcul.

Première séance : séance culturelle en classe entière

J'ai débuté la séance par une projection de diapositives tirées du livre " *Fractals for the Classroom* " [1] montrant des fractales observées dans la nature (photo d'un Brocoli Romanesco, photo d'un coquillage de l'océan indien sur la coque duquel on observe le dessin de la fractale de Sierpinski) et des images de fractales créées sur ordinateur (le tétraèdre de Sierpinski, des fractales de Mandelbrot, et autres...). Les élèves ont essayé de décrire ce qu'ils voyaient, ils ont remarqué des circonvolutions, des réseaux fluviaux, des structures qui se ressemblent et se répètent à l'infini. Puis je leur ai proposé trois extraits de livres, citations qui leur ont permis d'appréhender la notion de fractales mieux que n'importe quelle définition que j'aurais pu essayer de leur donner...

Un des premiers à avoir décrit un objet fractal fut Jean Perrin (1905) dans sa préface de " *atomes* " :

" Observons, par exemple, un des flocons blancs - un colloïde -, qu'on obtient en salant de l'eau de savon. De loin, son contour peut sembler net, mais sitôt qu'on s'approche un peu, cette netteté s'évanouit. si l'on prend une loupe, un microscope, l'incertitude reste aussi grande, car, chaque fois qu'on augmente le grossissement, on voit apparaître des anfractuosités nouvelles, sans jamais éprouver l'impression nette et reposante que donne, par exemple, une bille d'acier poli..."

Second coup d'oeil sur la diapo du brocoli (j'aurais pu apporter un chou-fleur...) regardé avec une loupe, on comprend mieux cette idée de contour qui semble net au premier abord puis dont la netteté s'estompe dès que l'on procède à une observation plus fouillée.

Benoît Mandelbrot (1995) dans son introduction de " *Les objets fractals : Forme, hasard et dimension* " [2] les décrit ainsi : "... des objets naturels très divers, ... tels la Terre, le Ciel et l'Océan, sont étudiés à l'aide d'une large famille d'objets géométriques... Pour les étudier, j'ai conçu, mis au point et largement

utilisé une nouvelle géométrie de la nature. La notion qui lui sert de fil conducteur sera désignée par l'un de deux néologismes synonymes, " *objet fractal* " et " *fractale* ", termes que je viens de former, (...), à partir de l'adjectif latin *fractus*, qui signifie " *irrégulier ou brisé* ". "

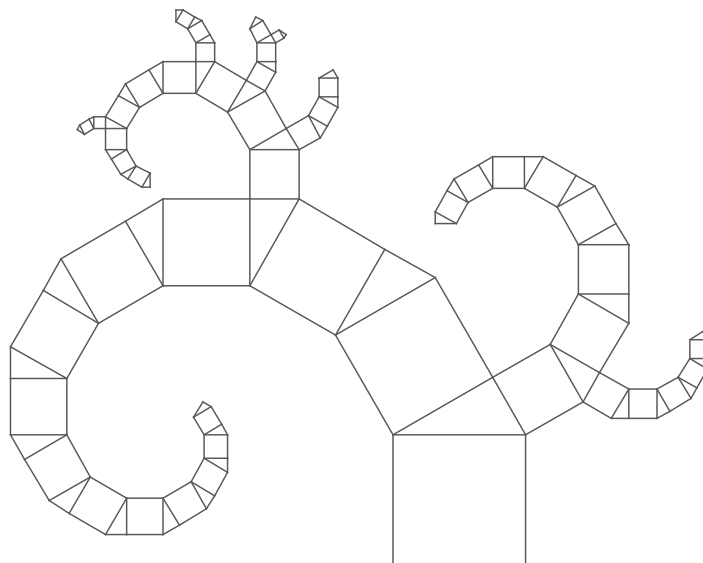
Dans une brochure de l'IREM de Poitiers [3], un petit historique est donné :

" La théorie des fractales de B. Mandelbrot a vu le jour en 1975 avec " *Les objets fractals : Forme, hasard et dimension* ". L'origine de cette théorie a une centaine d'années. Ce fut, à partir d'une interrogation sur la notion de dimension, la construction de " *monstres* " par Cantor, Péano, Von Koch, Hausdorff. Ces monstres étaient des courbes étranges entre courbes et surfaces. Ce fut par exemple en 1890 la découverte par Péano d'une courbe remplissant un carré et permettant de mettre en bijection un segment de dimension un et une surface de dimension deux. La fonction de ces monstres était essentiellement de fournir des contre-exemples. Il s'agissait donc d'objets mathématiques isolés. Mais, pour modéliser certains phénomènes naturels irréguliers (côtes maritimes, montagne, réseaux fluviaux, structure alvéolaire du poumon...) B. Mandelbrot eu l'idée de faire appel à ces monstres et de les unifier au sein d'une nouvelle géométrie de la nature en rupture totale avec celle d'Euclide et de Bourbaki : la théorie des fractales rompt en effet avec le régulier, le continu, le général, et marque un retour au graphique, au dessin. Nous avons à faire à une nouvelle vision du monde ou empirisme, esthétique et mathématique entretenu de nouveaux rapports. "

Pour illustrer ces trois citations, nous avons observé de magnifiques images représentant ces objets mystérieux, qui possèdent des propriétés si étonnantes [4].

Nous avons terminé la séance par une exploration du monde fractal à l'aide du logiciel " *Fractint* " (en libre distribution), installé sur les ordinateurs de notre salle de maths. Les élèves ont pu choisir leurs fractales, ils ont regardé émerveillés, des fractales aux couleurs éclatantes telles que les ensembles de Julia, l'attracteur de Lorentz, des ensembles de Cantor, Sierpinski 2D et 3D etc...; la plus belle à mon sens étant la fractale de Lyapunov dessinée sur un écran SVGA 1048x720 surtout lorsque cette fractale s'anime et prend des tons qui s'intensifient vers le rouge en appuyant sur les touches + et F6. Cela leur a fait l'effet d'une séance de yoga ! Beau, universel, magique, divin, harmonieux, lumineux, tout autant d'adjectifs qui leur sont venus à l'esprit. Enfin, plaisir des yeux, plaisir de découvrir une nouvelle géométrie hors norme, pour laquelle l'esthétique prime sur la réflexion. Mes élèves ont été marqués par l'intensité, la sérénité et la profondeur de ces images irréelles en mouvement, d'une autre dimension...

Le logiciel " *Fractint* " permet de voir se



redessiner en temps réel les contours de la fractale lorsque l'on zoom à l'infini. Vous trouverez en annexe les références exactes du logiciel.

Deuxième séance

séance de module en demi-classe pour l'accès aux ordinateurs

Nous avons ensuite regardé de plus près des fractales très connues telles que le triangle de Sierpinski, la courbe de Von Koch - dite encore flocon de neige pour sa forme caractéristique - car leurs algorithmes de construction sont faciles à reconnaître et à traduire. La figure page ci-contre propose des diaporamas (ou films de construction) qui visualisent les étapes de formation des générations successives de quelques un de ces objets géométriques. (Voir note ci-contre : *Comment réaliser avec CABRI un film de construction ?*)

Les figures proposées ne font appel à aucune technicité et sont réalisables dès le collège moyennant un peu de dextérité dans le maniement des macros-construction.

Les élèves ont observé ces diaporamas, étudié le mode de formation de ces objets géométriques et ont proposé un algorithme de construction de chacune des figures proposées, algorithme qu'ils ont essayé de reproduire sur Cabri. Cabri est particulièrement bien adapté à la construction d'objets fractals simples, puisque ce sont des processus répétitifs. La plus grande difficulté rencontrée, lorsqu'il s'est agi de reproduire les fractales du diaporama, a été d'optimiser les constructions afin de construire

le plus de générations possibles, car très vite, la figure comporte un grand nombre d'objets.

Avec les premières S, nous avons tenté d'observer que les courbes fractales sont " continues " mais n'admettent en aucun point de tangente.

Cette activité s'inscrit très bien au sein d'une séance de module et a débouché sur un travail plus ou moins approfondi sur les suites (peu approfondi en Première L mais plus recherché en Première S).

Troisième séance

approche par le calcul

Après les séquences émotion, retour de la planète fractale (sur laquelle nous avons été transportés grâce à *Fractint* notamment) vers la planète calcul car je voulais clore ces quelques activités autour du monde fractal par un travail sur les suites. Comment concevoir de tels objets géométriques dont la surface est finie puisqu'elle est contenue dans une feuille de papier et le périmètre infini ? Ces deux notions peuvent être confirmées par un simple calcul de limite de suites. Ainsi, - et l'activité est proposée dans quelques livres de première et de terminale - nous nous sommes plus particulièrement intéressés à la fractale de Sierpinski, et à celle de Von Koch (celle qui ressemble à un flocon de neige dès la quatrième génération)... Elle a même fait l'objet d'un sujet de bac série A1 (session de remplacement 1990) dans lequel ils examinent " une des courbes dites pathologiques qu'on rencontre en mathématique, courbes construites par les mathématiciens dans leurs tentatives pour démontrer l'exactitude ou la fausseté de certaines idées mathématiques ". On s'intéresse dans cette activité à une suite de polygones, le premier étant un triangle équilatéral de côté 1.

(a) la doc de Cabri v 1.7 PC lui-même.

(b) " *Réalisation et utilisation de films de constructions avec le logiciel Cabri-géomètre* " P.G. Bertomeu, actes de l'Université d'été : Apprentissage et enseignement de la géométrie avec ordinateur : Utilisation du logiciel Cabri-géomètre en classe, Grenoble juillet 1993.

CABRI AU LYCÉE

[5] " *Les fractals* ", de
Ian Stewart, collection
Les chroniques de Rose
Polymath, Belin 1982.
bande dessinée drôle et
éclairante sur la
découverte par Gaston
d'un monde en fait
entièrement fractal...
elle vous donnera une
foule d'idées pour des
constructions d'objets
géométriques originaux
en collège, et pour des
exercices sur les suites
en lycée.

Pour former le polygone de la seconde génération, on divise chacun des côtés de ce triangle en trois parties égales, et on élève sur la partie du milieu un triangle équilatéral de côté $1/3$. Pour le polygone P_n , on désigne par : c_n le nombre de ses côtés, l_n la longueur de chaque côté, p_n son périmètre, et a_n son aire. Les élèves ont pu trouver l'expression des c_n , l_n , p_n , a_n , en fonction de n en observant le schéma de formation de la suite des polygones d'une part, et en s'aidant des chroniques de Rose Polymath [5], d'autre part. Ils en ont déduit les limites de p_n , le périmètre et a_n , l'aire du polygone lorsque n tend vers l'infini. L'aire est bien finie alors que le périmètre est infini.

Pour clore ces trois séances, nous avons essayé de donner une définition d'un objet fractal (vous remarquerez que dans les citations données plus haut, personne, pas même Mandelbrot, n'ose se lancer à définir ce qu'est un objet fractal). Nous avons ensemble choisi la définition proposée par la collection " Fractale " de chez Bordas :

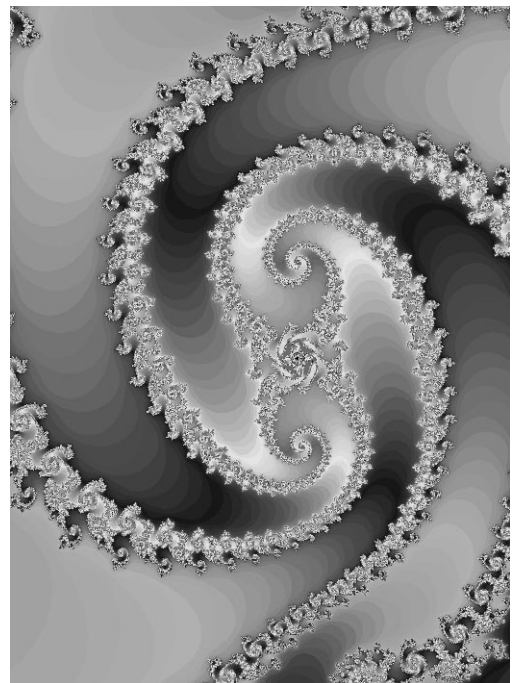
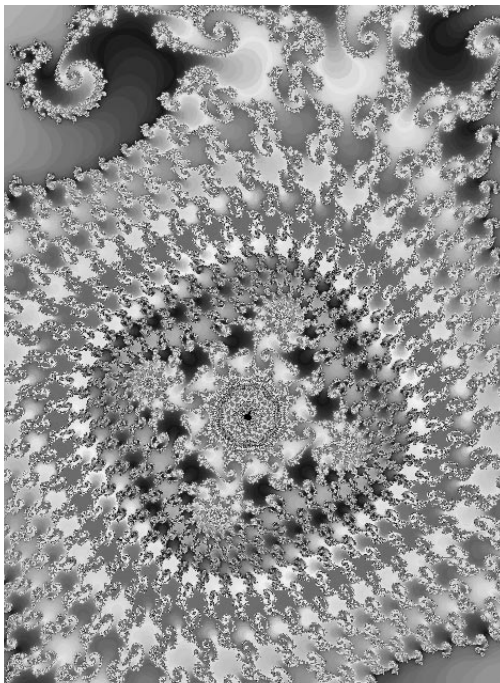
" Un objet fractal peut être défini comme celui qui possède une structure d'homothétie interne, c'est-à-dire une structure se répétant

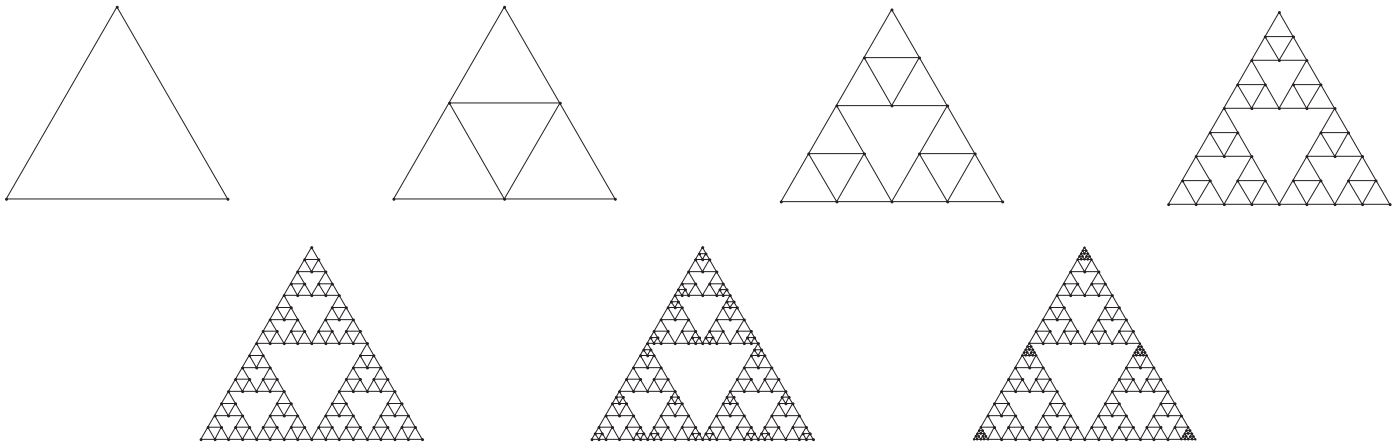
indéfiniment, quelle que soit l'échelle d'observation. "

C'est quoi une homothétie interne ? Voir la réponse de Rose Polymath faite à Gaston p18 [5]. Son explication la conduit à expliquer à Gaston que ces objets ont une dimension non entière : la dimension de Hausdorff...

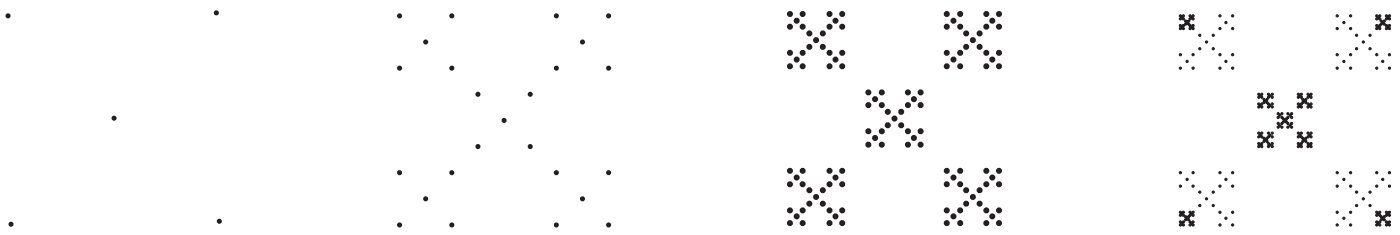
[6] " *Les fractales de 1872 à 1919* " de Jean-Luc Chabert, IREM de Picardie, juillet 1984

FRACTINT 17.2 (ou plus)
Public Software Library
PO Box 35 705
Houston
TX 77 235 - 5705 (USA)

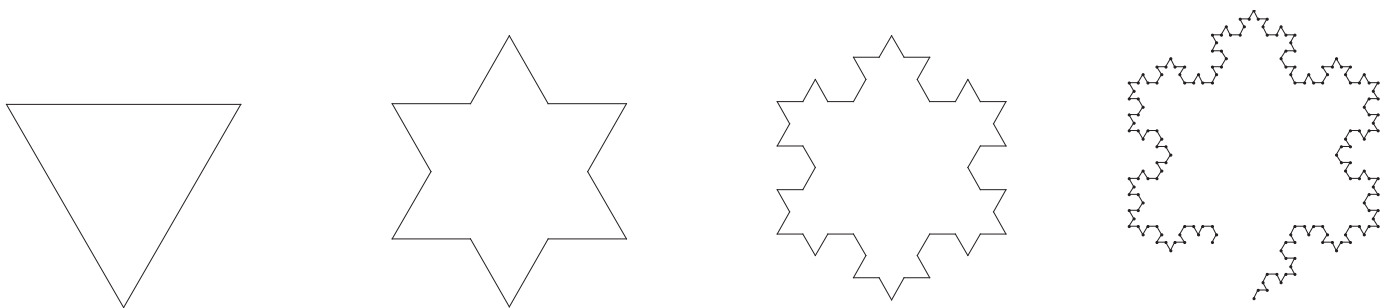




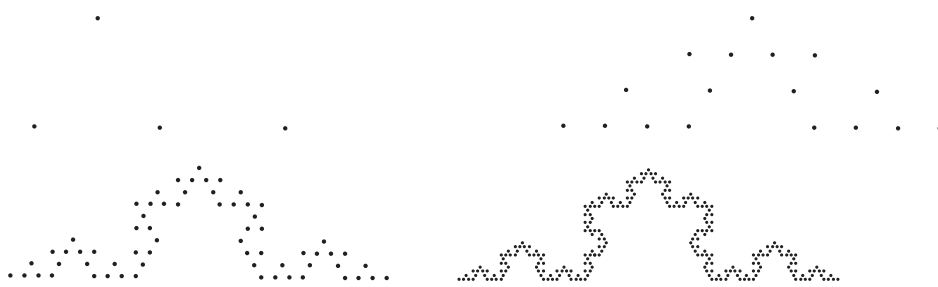
Sierpinski 2D



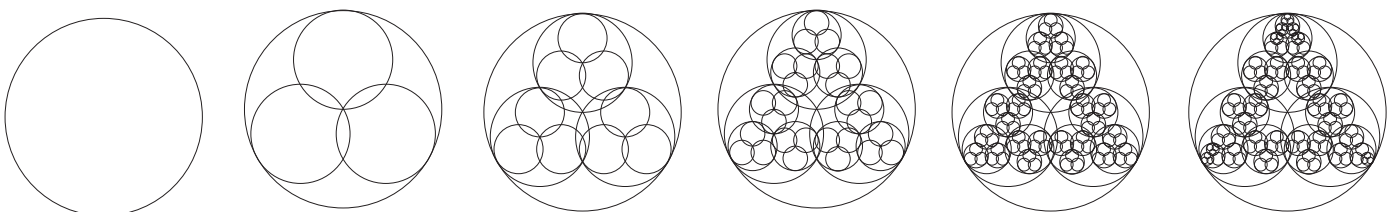
Vertiges de carrés



Dessine-moi un flocon : Von Koch sur triangle équilatéral



Dessine-moi un flocon : Von Koch sur segment



Du cercle aux amas cellulaires